KESTABILAN TITIK *EQUILIBRIUM* MODEL SIR (*SUSPECTIBLE, INFECTED, RECOVERED*) PENYAKIT FATAL DENGAN MIGRASI

Mohammad soleh[1], Leni Darlina[2]
[1,2]Jurusan Matematika Fakultas Sains dan Teknologi
Universitas Islam Negeri Sultan Syarif Kasim Riau
Jl. HR. Soebrantas No. 155 Pekanbaru
[1)] Email: *msoleh1975@yahoo.co.id*

ABSTRAK

Pada makalah ini dibahas tentang penyebaran penyakit fatal menggunakan model SIR. Diasumsikan terjadi kelahiran dan kematian alami, kematian akibat penyakit yang dibicarakan dan adanya migrasi. Hasil yang diperoleh yaitu jika $b + \rho_1 < \rho_2 + \mu$ dan jika $\beta \frac{b}{(\mu - \rho_1 + \rho_2)} < \rho_2 - \rho_1 + m + \mu + \alpha$, titik kesetimbangan bebas penyakit stabil asimtotik, sebaliknya jika $b + \rho_1 < m + \rho_2 + \mu + \alpha$ dan jika $b\beta + \rho_1 > \rho_2 + \mu$ titik kesetimbangan endemik penyakit stabil asimtotik.

KataKunci : Fatal, Migrasi, Model SIR, Stabil Asimtotik, Titik Kesetimbangan.

ABSTRACT

Our paper discussed about mathematical modeling in spreading of infectious diseases SIR model. In this model, the birth and death is assumed occur naturally in the population. Effect of death conversed disease and migration processes occur too. The result obtained that if $b + \rho_1 < \rho_2 + \mu$ *and* $\beta \frac{b}{(\mu - \rho_1 + \rho_2)} < \rho_2 - \rho_1 + m + \mu + \alpha$ *disease-free equilibrium is asymptotic stable, otherwise if* $b + \rho_1 < m + \rho_2 + \mu + \alpha$ *and* $b\beta + \rho_1 > \rho_2 + \mu$ *endemic equilibrium point is asymptotic stable.*

Keywords *: Asymptotic Stable, Effect of Death, Equilibrium, Migration, SIR Model.*

1. PENDAHULUAN

Penyebaran penyakit merupakan masalah serius yang dihadapi oleh masyarakat karena dapat menimbulkan kerugian termasuk kematian. Penyakit yang dapat menimbulkan kematian disebut penyakit fatal. Beberapa contoh penyakit fatal diantaranya adalah Demam Berdarah, HIV dan Tuberculosis, dan lain-lain. Ketiga penyakit ini termasuk jenis penyakit menular. Penyebaran penyakit-penyakit menular dipengaruhi oleh kepadatan penduduk, migrasi, dan lain-lain.

Migrasi atau perpindahan penduduk dari suatu wilayah ke wilayah lain merupakan fenomena yang umum terjadi. Migrasi terbagi dua, yakni emigrasi dan imigrasi. Emigrasi adalah keluarnya penduduk dari satu wilayah/daerah tertentu ke wilayah/daerah lain. Sedangkan imigrasi adalah masuknya penduduk dalam populasi dari wilayah lain. Migrasi dapat mempengaruhi penyebaran penyakit karena banyaknya orang-orang yang tidak kebal yang datang dari daerah lain (seperti pengungsi, migrasi ekonomi, atau turis) bisa menjadi penyebab berjangkitnya penyakit menular ke daerah baru yang dimasuki (Purba E.M, 2007).

Penelitian tentang model penyebaran penyakit yang berhubungan dengan model SIR antara lain adalah penelitian dengan judul *Pembuatan model matematika dengan software untuk penghitung tingkat vaksinasi pada penyebaran penyakit menular* tahun 2005 karangan Asep K. Supriatna dkk yang membahas model penyebaran penyakit dengan model SIR dan SIS dengan hasil diperoleh tingkat vaksinasi untuk beberapa keadaan, dan jurnal matematika yang berjudul *Model SIR Penyakit Tidak Fatal* tahun 2007 karangan Husni Tamrin dkk, yang membahas penyebaran penyakit tidak fatal menggunakan model SIR dengan asumsi populasi tertutup atau tidak ada proses migrasi dengan kesimpulan bahwa titik kesetimbangan bebas penyakit stabil asimtotik jika $\beta < \alpha + \mu$, dan titik kesetimbangan endemik penyakit stabil asimtotik jika $\beta > \alpha + \mu$.

Penulis tertarik untuk mengulas tentang model SIR dengan beberapa asumsi: adanya kelahiran dan kematian alami yang dapat mempengaruhi penyebaran penyakit dalam suatu populasi, dan adanya migrasi.

2. METODOLOGI PENELITIAN

Metodologi yang digunakan dalam penelitian ini adalah studi literatur atau mempelajari literatur yang berhubungan dengan pemodelan matematika yaitu:

a) Membuat asumsi-asumsi dalam model, diantaranya adanya kelahiran dan kematian alami, kematian akibat penyakit yang dibicarakan dan migrasi.
b) Menentukan diagram alir antar subpopulasi
c) Membuat model matematika, yaitu model SIR dengan berdasarkan asumsi dan diagram alir.
d) Menentukan titik kesetimbangan (*equilibrium*), yakni titik kesetimbangan bebas penyakit dan titik kesetimbangan endemik penyakit..
e) Menganalisa kestabilan titik kesetimbangan, apakah stabil, stabil asimtotik atau tidak.
f) Melakukan simulasi kestabilan titik keseimbangan
g) Menyimpulkan hasil dari analisis kestabilan titik kesetimbangan.

3. PEMBAHASAN DAN HASIL

3.1 Pembentukan Model

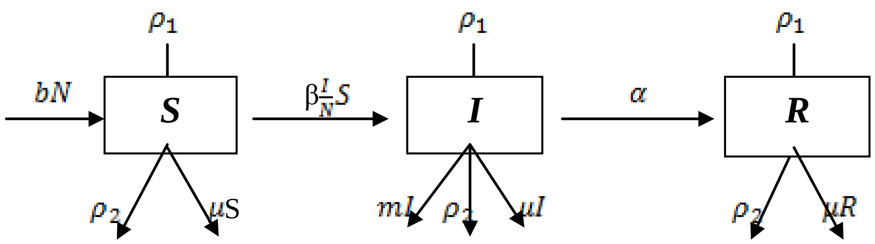
Ppopulasi dibagi menjadi tiga kelas yaitu kelas *susceptible* atau kelas yang berisi individu-individu rentan terhadap penyakit, kelas *infected* atau kelas yang berisi individu-individu terinfeksi penyakit dan dapat menularkan penyakit, dan kelas *recovered* yang berarti kelas yang berisi individu-individu yang telah sembuh dari penyakit.

Jika $S(t)$ menyatakan jumlah individu yang rentan terhadap penyakit (*susceptible)* pada saat *t*, $I(t)$ menyatakan jumlah individu terinfeksi (*infected*) pada saat *t*, dan $R(t)$ menyatakan jumlah individu yang *recovered* atau sembuh, serta $N(t)$ menyatakan jumlah populasi pada saat *t*, maka $S(t) + I(t) + R(t) = N(t)$.

Asumsi-asumsi atau catatan-catatan yang diberikan dalam model SIR ini di antaranya sebagai berikut :

1) Dalam populasi terjadi proses migrasi, dengan laju imigrasi besarnya konstan $\rho_1 > 0$, dan laju emigrasi besarnya konstan $\rho_2 > 0$.
2) Adanya proses kelahiran dan kematian alami dalam populasi dengan laju kelahiran konstan $b > 0$ dan laju kematian konstan $\mu > 0$.
3) Laju penularan penyakit dari *susceptible* menjadi *infected* adalah konstan dan dinyatakan dengan $\beta > 0$.
4) Laju kesembuhan penyakit dari *infected* menjadi *recovered* adalah konstan dan dinyatakan dengan $\alpha > 0$.
5) Laju kematian akibat penyakit yang dibicarakan adalah konstan dan dinyatakan dengan $m > 0$.

Berdasarkan asumsi-asumsi tersebut pada tersebut, maka dapat dibuat diagram alir model SIR seperti gambar berikut:



Gambar 1. Model SIR Penyakit Fatal dengan Migrasi

Dari model gambar di atas, maka diperoleh sistem persamaan diferensial sebagai berikut :

$$\begin{aligned} \frac{dS}{dt} &= bN - \beta\frac{I}{N}S + \rho_1 S - \rho_2 S - \mu S \\ \frac{dI}{dt} &= \beta\frac{I}{N}S + \rho_1 I - mI - \rho_2 I - \mu I - \alpha I \\ \frac{dR}{dt} &= \alpha I + \rho_1 R - \rho_2 R - \mu R \end{aligned} \quad (1)$$

$$S + I + R = N.$$

3.2 .... Titik Kestimbangan

a. Titik kesetimbangan bebas penyakit ($I = 0$)

Untuk mendapatkan titik kesetimbangan sistem (1), maka persamaan-persamaan pada sistem (1) diberi nilai nol, sehingga sistem (1) menjadi :

$$bN - \beta\frac{I}{N}S + \rho_1 S - \rho_2 S - \mu S = 0$$

$$bN + \rho_1 S - \rho_2 S - \mu S = 0$$

$$bN + (\rho_1 - \rho_2 - \mu)S = 0$$

$$bN - (\mu - \rho_1 + \rho_2)S = 0$$

$$(\mu - \rho_1 + \rho_2)S = bN$$

Sehingga diperoleh S untuk titik kesetimbangan bebas penyakit yang dinotasikan dengan S^*, yaitu $S^* = \frac{bN}{(\mu-\rho_1+\rho_2)}$, dengan syarat $\mu > \rho_1 - \rho_2$.

Diperoleh titik kesetimbangan bebas penyakit $(S^*, I^*) = \left(\frac{bN}{(\mu-\rho_1+\rho_2)}, 0\right)$ dengan syarat $\mu > \rho_1 - \rho_2$.

b. Titik Kesetimbangan Endemik Penyakit ($I > 0$)

$$\beta\frac{I}{N}S + \rho_1 I - mI - \rho_2 I - \mu I - \alpha I = 0$$

$$\beta\frac{S}{N} + \rho_1 - m - \rho_2 - \mu - \alpha)I = 0$$

$$\left(\beta\frac{S}{N} + \rho_1 - m - \rho_2 - \mu - \alpha\right) = 0$$

$$\beta\frac{S}{N} = -\rho_1 + m + \rho_2 + \mu + \alpha$$

Sehingga diperoleh S untuk titik kesetimbangan endemik penyakit yang dinotasikan dengan $\hat{S}$, yaitu $\hat{S} = \frac{-\rho_1+m+\rho_2+\mu+\alpha}{\beta}$, sehingga:

$$bN - \beta\frac{I}{N}S + \rho_1 S - \rho_2 S - \mu S = 0$$

$$bN - \beta\frac{I}{N}\left(\frac{-\rho_1+m+\rho_2+\mu+\alpha}{\beta}N\right) + \rho_1\left(\frac{-\rho_1+m+\rho_2+\mu+\alpha}{\beta}N\right) - \rho_2\left(\frac{-\rho_1+m+\rho_2+\mu+\alpha}{\beta}N\right) - \mu\left(\frac{-\rho_1+m+\rho_2+\mu+\alpha}{\beta}N\right) = 0$$

$$bN - I(-\rho_1 + m + \rho_2 + \mu + \alpha) + \rho_1\left(\frac{-\rho_1+m+\rho_2+\mu+\alpha}{\beta}N\right) - \rho_2\left(\frac{-\rho_1+m+\rho_2+\mu+\alpha}{\beta}N\right) - \mu\left(\frac{-\rho_1+m+\rho_2+\mu+\alpha}{\beta}N\right) = 0$$

$$bN - I(-\rho_1 + m + \rho_2 + \mu + \alpha) = -\rho_1\left(\frac{-\rho_1+m+\rho_2+\mu+\alpha}{\beta}N\right) + \rho_2\left(\frac{-\rho_1+m+\rho_2+\mu+\alpha}{\beta}N\right) + \mu\left(\frac{-\rho_1+m+\rho_2+\mu+\alpha}{\beta}N\right)$$

$$-I(-\rho_1 + m + \rho_2 + \mu + \alpha) = -\rho_1\left(\frac{-\rho_1+m+\rho_2+\mu+\alpha}{\beta}N\right) + \rho_2\left(\frac{-\rho_1+m+\rho_2+\mu+\alpha}{\beta}N\right) + \mu\left(\frac{-\rho_1+m+\rho_2+\mu+\alpha}{\beta}N\right) - bN$$

$$I(-\rho_1 + m + \rho_2 + \mu + \alpha) = \rho_1\left(\frac{-\rho_1+m+\rho_2+\mu+\alpha}{\beta}N\right) - \rho_2\left(\frac{-\rho_1+m+\rho_2+\mu+\alpha}{\beta}N\right) - \mu\left(\frac{-\rho_1+m+\rho_2+\mu+\alpha}{\beta}N\right) + bN$$

$$I = \frac{\rho_1\left(\frac{-\rho_1+m+\rho_2+\mu+\alpha}{\beta}N\right)}{(-\rho_1+m+\rho_2+\mu+\alpha)} - \frac{\rho_2\left(\frac{-\rho_1+m+\rho_2+\mu+\alpha}{\beta}N\right)}{(-\rho_1+m+\rho_2+\mu+\alpha)} - \frac{\mu\left(\frac{-\rho_1+m+\rho_2+\mu+\alpha}{\beta}N\right)}{(-\rho_1+m+\rho_2+\mu+\alpha)} + bN$$

$$I = \rho_1\frac{N}{\beta} - \rho_2\frac{N}{\beta} - \mu\frac{N}{\beta} + bN$$

$$I = N\left(\frac{\rho_1}{\beta} - \frac{\rho_2}{\beta} - \frac{\mu}{\beta} + b\right)$$

Diperoleh titik kesetimbangan endemik $(\hat{S}, \hat{I}) = \left(\frac{-\rho_1+m+\rho_2+\mu+\alpha}{\beta}N, \left(\frac{\rho_1-\rho_2-\mu}{\beta} + b\right)N\right)$

3.3 Kestabialn Titik Kesetimbangan

Misalkan :

$$f(S,I) = bN - \beta\frac{I}{N}S + \rho_1 S - \rho_2 S - \mu S$$

$$g(S,I) = \beta\frac{I}{N}S + \rho_1 I - mI - \rho_2 I - \mu I - \alpha I$$

Kemudian masing-masing fungsi diturunkan secara parsial terhadap variabel pada fungsi tersebut, seperti di bawah ini :

$$\frac{\partial f(S,I)}{\partial S} = \frac{\partial\left(b(S+I+R) - \beta\frac{I}{N}S + \rho_1 S - \rho_2 S - \mu S\right)}{\partial S} = b - \beta\frac{I}{N} + \rho_1 - \rho_2 - \mu$$

$$\frac{\partial f(S,I)}{\partial I} = \frac{\partial\left(b(S+I+R) - \beta\frac{I}{N}S + \rho_1 S - \rho_2 S - \mu S\right)}{\partial I} = b - \beta\frac{S}{N}$$

$$\frac{\partial g(S,I)}{\partial S} = \frac{\partial(\beta\frac{I}{N}S + \rho_1 I - mI - \rho_2 I - \mu I - \alpha I)}{\partial S} = \beta\frac{I}{N}$$

$$\frac{\partial g(S,I)}{\partial I} = \frac{\partial(\beta\frac{I}{N}S + \rho_1 I - mI - \rho_2 I - \mu I - \alpha I)}{\partial I} = \beta\frac{S}{N} + \rho_1 - m - \rho_2 - \mu - \alpha$$

Selanjutnya akan ditentukan matrik Jacobian dari beberapa turunan parsial di atas, sehingga :

$$Jf(S,I) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f(S,I)}{\partial S} & \frac{\partial f(S,I)}{\partial I} \\ \frac{\partial g(S,I)}{\partial S} & \frac{\partial g(S,I)}{\partial I} \end{bmatrix}.$$

$$Jf(S,I)=\begin{bmatrix} b-\beta\frac{I}{N}+\rho_1-\rho_2-\mu & b-\beta\frac{S}{N} \\ \beta\frac{I}{N} & \beta\frac{S}{N}+\rho_1-m-\rho_2-\mu-\alpha \end{bmatrix}$$

a. Kestabilan titik kesetimbangan bebas penyakit, $(S^*,I^*)=\left(\frac{bN}{(\mu-\rho_1+\rho_2)},0\right)$.

Teorema 1 :

Titik kesetimbangan bebas penyakit $(S^*,I^*)=\left(\frac{bN}{(\mu-\rho_1+\rho_2)},0\right)$ stabil asimtotik jika $b+\rho_1<\rho_2+\mu$ dan $\beta\frac{b}{(\mu-\rho_1+\rho_2)}<\rho_2-\rho_1+m+\mu+\alpha$

.

Bukti :

Substitusikan $\left(\frac{bN}{(\mu-\rho_1+\rho_2)},0\right)$ ke dalam matriks $Jf(S,I)$ tersebut sehingga diperoleh matriks $Jf\big((S^*,I^*)\big)$:

$$Jf(S^*,I^*)=\begin{bmatrix} b+\rho_1-\rho_2-\mu & b-\beta\frac{b}{(\mu-\rho_1+\rho_2)} \\ 0 & \beta\frac{b}{(\mu-\rho_1+\rho_2)}+\rho_1-m-\rho_2-\mu-\alpha \end{bmatrix}$$

Misal matriks $M_1=(\lambda I-Jf(S^*,I^*))$

$$M_1=\begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}-\begin{bmatrix} b+\rho_1-\rho_2-\mu & b-\beta\frac{b}{(\mu-\rho_1+\rho_2)} \\ 0 & \beta\frac{b}{(\mu-\rho_1+\rho_2)}+\rho_1-m-\rho_2-\mu-\alpha \end{bmatrix}$$

$$|M_1|=\begin{vmatrix} \lambda-[b+\rho_1-\rho_2-\mu] & -b+\beta\frac{b}{(\mu-\rho_1+\rho_2)} \\ 0 & \lambda-\left[\beta\frac{b}{(\mu-\rho_1+\rho_2)}+\rho_1-m-\rho_2-\mu-\alpha\right] \end{vmatrix}$$

$$Det\begin{vmatrix} \lambda-[b+\rho_1-\rho_2-\mu] & -b+\beta\frac{b}{(\mu-\rho_1+\rho_2)} \\ 0 & \lambda-\left[\beta\frac{b}{(\mu-\rho_1+\rho_2)}+\rho_1-m-\rho_2-\mu-\alpha\right] \end{vmatrix}=0$$

Dari determinan M_1 di atas, maka diperoleh persamaan karakteristik :

$$(\lambda-[b+\rho_1-\rho_2-\mu])\left(\lambda-\left[\beta\frac{b}{(\mu-\rho_1+\rho_2)}+\rho_1-m-\rho_2-\mu-\alpha\right]\right)=0$$

sehingga nilai-nilai eigen dari persamaan karakteristik di atas adalah:

$\lambda_1=b+\rho_1-\rho_2-\mu,$ dan

$\lambda_2=\beta\frac{b}{(\mu-\rho_1+\rho_2)}+\rho_1-m-\rho_2-\mu-\alpha.$

Diketahui bahwa $b+\rho_1<\rho_2+\mu$ maka $\lambda_1<0$, dan $\beta\frac{b}{(\mu-\rho_1+\rho_2)}<\rho_2-\rho_1+m+\mu+\alpha$ maka $\lambda_2<0$. Itu berarti bahwa untuk t menuju tak hingga (dalam waktu yang lama) tidak ada penyakit dalam populasi jika laju kelahiran ditambah dengan laju imigrasi lebih kecil dari laju emigrasi dan laju kematian alami, dan juga jika dalam populasi besar laju penularan dikali dengan laju kelahiran dibagi dengan laju kematian dikurangi dengan laju imigrasi serta ditambah dengan laju emigrasi lebih kecil dari laju emigrasi dikurangi dengan laju imigrasi ditambah laju kematian akibat penyakit yang dibicarakan, ditambah dengan laju kematian alami dan ditambah dengan laju kesembuhan.

b. Kestabilan titik kesetimbangan endemik penyakit $(\hat{S},\hat{I}) = \left(\frac{-\rho_1+m+\rho_2+\mu+\alpha}{\beta}N, \left(\frac{\rho_1-\rho_2-\mu}{\beta}+b\right)N\right)$

Teorema 2: Titik kesetimbangan endemik penyakit $(\hat{S},\hat{I}) = \left(\frac{-\rho_1+m+\rho_2+\mu+\alpha}{\beta}N, \left(\frac{\rho_1-\rho_2-\mu}{\beta}+b\right)N\right)$ stabil asimtotik jika $b+\rho_1 < m+\rho_2+\mu+\alpha$ dan $b\beta+\rho_1 > \rho_2+\mu$

Bukti :

Matriks Jacobian $Jf(\hat{S},\hat{I})$:

$$Jf(\hat{S},\hat{I}) = \begin{bmatrix} b-b\beta & b-(-\rho_1+m+\rho_2+\mu+\alpha) \\ \rho_1-\rho_2-\mu+b\beta & 0 \end{bmatrix}$$

Misalkan matriks $M_2 = \left(\lambda I - Jf(\hat{S},\hat{I})\right)$, maka :

$$M_2 = \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} - Jf(\hat{S},\hat{I})$$

$$M_2 = \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} b-b\beta & b+\rho_1-m-\rho_2-\mu-\alpha \\ \rho_1-\rho_2-\mu+b\beta & 0 \end{bmatrix}$$

$$M_2 = \begin{bmatrix} \lambda-b+b\beta & -b-\rho_1+m+\rho_2+\mu+\alpha \\ -\rho_1+\rho_2+\mu-b\beta & \lambda \end{bmatrix}$$

Selanjutnya untuk mendapatkan nilai eigen dari matriks di atas, maka akan dicari $det\left(\lambda I - Jf(\hat{S},\hat{I})\right) = 0.$

$$\det \begin{bmatrix} \lambda-b+b\beta & -b-\rho_1+m+\rho_2+\mu+\alpha \\ -\rho_1+\rho_2+\mu-b\beta & \lambda \end{bmatrix} = 0$$

Sehingga diperoleh persamaan karakteristik matriks Jacobian di atas adalah :

$$(\lambda-b+b\beta)\lambda - (-b-\rho_1+m+\rho_2+\mu+\alpha)(-\rho_1+\rho_2+\mu-b\beta) = 0$$

$$\lambda^2 - b\lambda + b\beta\lambda - (-b-\rho_1+m+\rho_2+\mu+\alpha)(-\rho_1+\rho_2+\mu-b\beta) = 0$$

$$\lambda^2 + (b\beta-b)\lambda - (-b-\rho_1+m+\rho_2+\mu+\alpha)(-\rho_1+\rho_2+\mu-b\beta) = 0$$

Misalkan $P = (b\beta - b)$ dan $= (-b-\rho_1+m+\rho_2+\mu+\alpha)(-b\beta-\rho_1+\rho_2+\mu)$, maka persamaan karakteristik di atas memiliki akar-akar :

$$\lambda_1 = \frac{-P+\sqrt{P^2-4Q}}{2}$$

dan

$$\lambda_2 = \frac{-P-\sqrt{P^2-4Q}}{2}$$

Karena $b+\rho_1 < m+\rho_2+\mu+\alpha$ dan $b\beta+\rho_1 > \rho_2+\mu$, maka bagian real pada $\lambda_1 < 0$ dan $\lambda_2 < 0$, sehingga berdasarkan teorema 4.2 titik kesetimbangan endemik penyakit stabil asimtotik, yang berarti bahwa untuk solusi awal yang cukup dekat dengan titik *equilibrium* maka solusi sistem (1) akan selalu berada cukup dengan titik *equilibrium*, dan untuk t menuju tak hingga maka solusi Sistem (1) akan sama dengan titik *equilibrium* endemik penyakit. Hal ini berarti bahwa untuk t menuju tak hingga selalu ada penyakit dalam populasi jika dalam populasi laju kelahiran ditambah laju imigrasi lebih kecil dari laju kematian(akibat penyakit yang dibicarakan) ditambah laju emigrasi lalu ditambah laju kematian alami dan laju kesembuhan, dan jika laju kelahiran dikali laju penularan ditambah laju imigrasi lebih besar dari laju emigrasi ditambah laju kematian alami.

3.4 Simulasi

a. Titik *Equilibrium* Bebas Penyakit

Ambil parameter: $b = 0{,}4$; $\beta = 0{,}3$; $p_1 = 0{,}1$; $p_2 = 0{,}2$; $\mu = 0{,}5$; $m = 0{,}6$; $\alpha = 0{,}7$.

Lalu, substitusikan nilai parameter tersebut ke dalam sistem (1) :

$\frac{dS}{dt} = 0{,}4 - 0{,}3\, is + 0{,}1\, s - 0{,}2\, s - 0{,}5s$

$\frac{dI}{dt} = 0{,}3is + 0{,}1is - 0{,}6i - 0{,}2i - 0{,}5i - 0{,}7i$

(2)

$\frac{dR}{dt} = 0{,}7i + 0{,}1r - 0{,}2r - 0{,}5r$

Titik *equilibrium* bebas penyakitnya adalah $(S^*, I^*) = \left(\frac{bN}{(\mu-\rho_1+\rho_2)}, 0\right)$ stabil asimtotik jika $b + p1 < p2 + \mu$ dan $\beta \frac{b}{(\mu-\rho_1+\rho_2)} < \rho_2 - \rho_1 + m + \mu + \alpha$.

$$Jf(S^*,I^*) = \begin{bmatrix} b + \rho_1 - \rho_2 - \mu & b - \beta \frac{b}{(\mu - \rho_1 + \rho_2)} \\ 0 & \beta \frac{b}{(\mu - \rho_1 + \rho_2)} + \rho_1 - m - \rho_2 - \mu - \alpha \end{bmatrix}$$

$$Jf(S^*,I^*) = \begin{bmatrix} 0{,}4 + 0{,}1 - 0{,}2 - 0{,}5 & 0{,}4 - \frac{0{,}3(0{,}4)}{(0{,}5-0{,}1+0{,}2)} \\ 0 & \frac{0{,}3\,(0{,}4)}{(0{,}5-0{,}1+0{,}2)} + 0{,}1 - 0{,}6 - 0{,}2 - 0{,}5 - 0{,}7 \end{bmatrix}$$

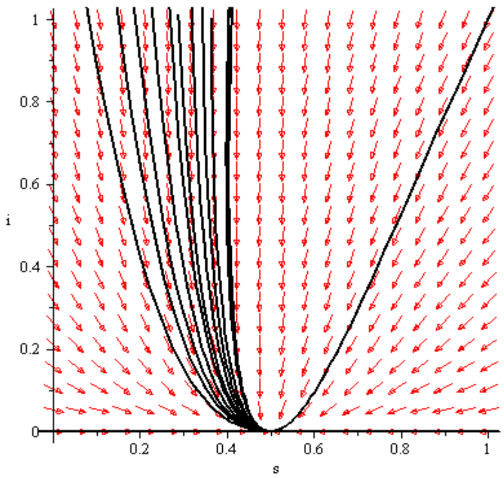
$$Jf(S^*,I^*) = \begin{bmatrix} -0{,}3 & 0{,}2 \\ 0 & -1{,}7 \end{bmatrix}$$

Lalu cari det $((\lambda I - Jf(S^*,I^*))$,

Det $\begin{bmatrix} \lambda + 0{,}3 & 0{,}2 \\ 0 & \lambda + 1{,}7 \end{bmatrix} = 0$

Sehingga didapat persamaan karakteristiknya : $(\lambda + 0{,}3)(\lambda + 1{,}7) = 0$

Dari persamaan karakteristiknya, diperoleh nilai-nilai eigen $\lambda_1 = -0{,}3$ dan $\lambda_2 = -1{,}7$. Dan berdasarkan itu dapat disimpulkan bahwa titik equilibrium bebas penyakit stabil asimtotik. Hal tersebut dapat digambarkan seperti gambar (4.2) di bawah ini:



Gambar 2. Orbit Kestabilan Titik Kesetimbangan Model SIR Penyakit Fatal dengan Migrasi

b. Titik *Equilibrium* Endemik Penyakit

Ambil parameter: $b = 0{,}5$; $\beta = 0{,}7$; $p_1 = 0{,}3$; $p_2 = 0{,}4$; $\mu = 0{,}1$; $m = 0{,}6$; $\alpha = 0{,}2$.

$\frac{dS}{dt} = 0{,}5 - 0{,}7\, is + 0{,}3\, s - 0{,}4\, s - 0{,}1s$

$\frac{dI}{dt} = 0{,}7is + 0{,}3is - 0{,}6i - 0{,}4i - 0{,}1i - 0{,}2i$ (3)

Lalu, substitusikan nilai parameter tersebut ke dalam sistem (4.1)

$\frac{dR}{dt} = 0{,}2i + 0{,}3r - 0{,}4r - 0{,}1r$

Titik *equilibrium* endemik penyakitnya adalah $(\hat{S},\hat{I}) = \left(\frac{-\rho_1+m+\rho_2+\mu+\alpha}{\beta}N, \left(\frac{\rho_1-\rho_2-\mu}{\beta}+b\right)N\right)$ dengan syarat $b+\rho_1 < m+\rho_2+\mu+\alpha$ dan $b\beta+\rho_1 > \rho_2+\mu$.

$$Jf(\hat{S},\hat{I}) = \begin{bmatrix} b-b\beta & b-(-\rho_1+m+\rho_2+\mu+\alpha) \\ \rho_1-\rho_2-\mu+b\beta & 0 \end{bmatrix}$$

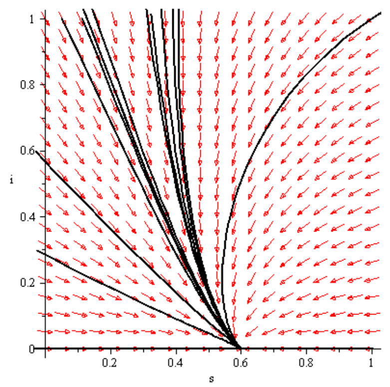
$$Jf(\hat{S},\hat{I}) = \begin{bmatrix} 0{,}5-0{,}5(0{,}7) & 0{,}5-(-0{,}3+0{,}6+0{,}4+0{,}1+0{,}2) \\ 0{,}3-0{,}4-0{,}1+0{,}5(0{,}7) & 0 \end{bmatrix}$$

$$Jf(\hat{S},\hat{I}) = \begin{bmatrix} 0{,}15 & -0{,}5 \\ 0{,}15 & 0 \end{bmatrix}$$

Det $\begin{bmatrix} \lambda-0{,}15 & 0{,}5 \\ -0{,}15 & \lambda \end{bmatrix} = 0$

Sehingga didapat persamaan karakteristiknya:

$(\lambda-0{,}15)(\lambda)-(-0{,}15)(0{,}5) = 0$ dan diperoleh nilai-nilai eigen $\lambda_1 = -0{,}5$ dan $\lambda_2 = -0{,}75$.



Gambar 3. Orbit Kestabilan Titik Kesetimbangan Model SIR Penyakit Fataldengan Migrasi

4. Kesimpulan

Berdasarkan pembahasan yang telah dilakukan, maka dapat disimpulkan sebagai berikut :

1. Model SIR penyakit fatal dengan migrasi adalah :

$$\frac{dS}{dt} = bN - \beta\frac{I}{N}S + \rho_1 S - \rho_2 S - \mu S$$

$$\frac{dI}{dt} = \beta\frac{I}{N}S + \rho_1 I - mI - \rho_2 I - \mu I - \alpha I$$

$$\frac{dR}{dt} = \alpha I + \rho_1 R - \rho_2 R - \mu R$$

dengan jumlah populasi diasumsikan $S+I+R=N$, dimana S, I dan R masing-masing adalah kelas *susceptible*, kelas *infected* dan kelas *recovered* dalam populasi.

2. Ada dua titik kesetimbangan pada model SIR penyakit fatal dengan migrasi yaitu
   a. Titik kesetimbangan bebas penyakit yaitu $(S^*, I^*) = \left(\frac{bN}{(\mu-\rho_1+\rho_2)}, 0\right)$ dengan syarat $\mu > \rho_1+\rho_2$.
   b. Titik kesetimbangan endemik penyakit yaitu $(\hat{S},\hat{I}) = \left(\left(\frac{-\rho_1+m+\rho_2+\mu+\alpha}{\beta}N\right), \left(\frac{\rho_1-\rho_2-\mu}{\beta} - b\right)N\right)$
   .

5. Referensi

Budiantoro, F. *Kestabilan Global pada Model Endemik SIR dengan Imigran.* Tugas Akhir Mahasiswa Universitas Sebelas Maret, Surakarta. 2009.

Duf, Y. dan Rui Xu. *A Delayed SIR Epidemic Model With Nonlinear Incidence Rate And Pulse Vaccination.* Math and Informatics. Korean Sigcam and KSCam. 2010.

Guo, H. dkk. *Global Stability Of The Endemic Equilibrium Of Multigroup SIR Epidemic Models.* Aplied Mathematics Institute. University of Alberta. 2006.

Hale, J. K. dan Kocak, H. *Dynamic and Bifurcation.* Springer-verlag. New York. 1991.

Meiss, J. D. *Differential Dynamical Systems.* Society for Industrial and Applied Mathematics. USA. 2007.

Perko, L. *Differential Equations and Dynamical Systems.* Springer-verlag. New York. 1991.

Pratiwi, N. dan Kartono. *Strategi Model Pengendalian Penyebaran Virus Influenza*, Jurnal Matematika Vol. 11, No.3, hal.141-145.ISSN:1410-8518. 2008.

Purba, E.M. *Analisa Model SIR untuk Kasus Epidemi*. Skripsi S1 FMIPA UNRI. Pekanbaru. 2007.

Sriningsih, Riri dan Soleh, M. *Model Pemilihan Kepala Daerah dalam Kompetisi Memperoleh Dukungan (Responden)*

Supriatna, A. K, dkk. *Pembuatan Model Matematika dan Software untuk Penghitungan Tingkat Vaksinasi pada Penyebaran Penyakit Menular.* UNPAD. Bandung. 2005.

Tamrin, H. dkk. *Model SIR Penyakit Tidak Fatal.* Jurnal Matematika Fakultas MIPA UGM. Yogyakarta. 2007.

Wiggins, S. *Introduction to Applied Nonlinear Dynamical System and Chaos*. Springer Verlag. New York. 1990.